第 11 講　式と証明・高次方程式(1)

1　すべての実数 x に対し，$x^3+2x^2+3x+4=a(x-10)^3+b(x-10)^2+c(x-10)+d$ となるような定数 a，b，c，d を求めよ．

【Point Pickup】

x についての恒等式

x にどんな値を入れても成立する式．主な解法は次の①と②．

①係数比較法 …… 両辺を x に関して整理し，「　　　　　　　」

②数値代入法 …… x の n 次式のとき，「　　　　　」個の異なる x の値について成立

因数にもつ

x の関数 $f(x)$ において $f(\alpha)=0$ のとき

$f(x)$ は「　　　　」で割り切れる（因数定理）$\Longleftrightarrow$ $f(x)$ は「　　　　」を因数にもつ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 ［1］ (1) 正の実数 a, b に対して，$(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\geqq 4$ が成り立つことを証明せよ．

(2) 正の実数 a, b, c に対して，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\geqq\dfrac{9}{a+b+c}$ が成り立つことを証明せよ．

［2］ $x>0$, $y>0$ のとき，不等式 $\left(9x+\dfrac{1}{y}\right)\left(4y+\dfrac{1}{x}\right)\geqq k$ が常に成り立つような k の値の最大値を求めよ．

【Point Pickup】

［1］ **不等式 $A\geqq B$ の証明**

「　　　　　」を計算し，0 以上であることを示す．

(相加平均)≧(相乗平均) の関係から

$a>0$, $b>0$ のとき

「　　　　　　　　　　」 等号成立は　　　　　　のとき

［2］ **$f(x)\geqq k$ が常に成り立つ**

⇒ $f(x)$ の　　　　　$\geqq k$ であればよい．

最小値を (相加平均)≧(相乗平均) の関係から導く

正の数 a, b について，積 ab が一定のとき

和 $a+b$ の最小値は

等号が成立するときを明記し，最小値の存在を明らかにすること．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 ［1］ $z^2=-2i$ のとき，z を求めよ．ただし，$i^2=-1$ である．

［2］ 2 次方程式 $x^2-x+1=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，$\alpha^{10}+\beta^{10}$，$\alpha^6-2\alpha^3\beta^3+\beta^6$ の値を求めよ．

【Point Pickup】

［1］ 複素数 $a+bi$

複素数 $z=a+bi$（a，b は実数）について

$b=0$ なら，z は「　　　　」

$b\neq 0$ なら，z は「　　　　」（さらに $a=0$ なら「　　　　　　」）

相等　a，b，c，d が実数のとき　$a+bi=c+di \iff a=c,\ b=d$

［2］ 1 の 3 乗根 ω

$x^2+x+1=0$ の虚数解を 1 つを ω とすると　$\omega^3=$　　，$\omega^2+\omega+1=0$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第11講　式と証明・高次方程式(1)

［1］ $x^3-2x^2+7x-1=(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+c$ が x についての恒等式であるとき，$a=$ ア ，$b=$ イ ，$c=$ ウ である.

［2］ $x>0$，$y>0$ のとき，不等式 $\dfrac{k}{x+y} \leqq \dfrac{1}{x}+\dfrac{49}{y}$ が常に成り立つような k の値の最大値は エオ である.

［3］ 2乗して $7+24i$ となる複素数は ±(カ ＋ キ i) である.

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第11講　式と証明・高次方程式(1)

1　すべての実数 x に対し，$x^3+2x^2+3x+4=a(x-10)^3+b(x-10)^2+c(x-10)+d$ となるような定数 a，b，c，d を求めよ．

$x^3+2x^2+3x+4=a(x-10)^3+b(x-10)^2+c(x-10)+d$　……①

(①の右辺) $=a(x^3-30x^2+300x-1000)+b(x^2-20x+100)+c(x-10)+d$

$=ax^3+(-30a+b)x^2+(300a-20b+c)x-1000a+100b-10c+d$

①の左辺と係数を比較して

$a=1$，$-30a+b=2$，$300a-20b+c=3$，$-1000a+100b-10c+d=4$

よって　$\boldsymbol{a=1}$，$\boldsymbol{b=32}$，$\boldsymbol{c=343}$，$\boldsymbol{d=1234}$

(別解)　①で $x=10$ を代入すると　$1234=d$

よって，①は　$x^3+2x^2+3x+4=a(x-10)^3+b(x-10)^2+c(x-10)+1234$

$\iff x^3+2x^2+3x-1230=a(x-10)^3+b(x-10)^2+c(x-10)$　……①′

$x=10$ のとき，①′の右辺の値は 0 より，左辺も 0 となる．

よって，$x^3+2x^2+3x-1230$ は $x-10$ を因数にもつ．

$x^3+2x^2+3x-1230=(x-10)(x^2+12x+123)$ より

したがって，①′ $\iff (x-10)(x^2+12x+123)=a(x-10)^3+b(x-10)^2+c(x-10)$

両辺を $x-10$ で割って　$x^2+12x+123=a(x-10)^2+b(x-10)+c$　……②

②で $x=10$ を代入すると　$343=c$

よって，②は　$x^2+12x+123=a(x-10)^2+b(x-10)+343$

$\iff x^2+12x-220=a(x-10)^2+b(x-10)$

$\iff (x-10)(x+22)=a(x-10)^2+b(x-10)$

両辺を $x-10$ で割って　$x+22=a(x-10)+b$　　つまり　$x+22=ax-10a+b$

両辺の係数を比較して　$a=1$，$22=-10a+b$

したがって，$a=1$，$b=32$，$c=343$，$d=1234$

2　[1]　(1)　正の実数 a，b に対して，$(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\geqq 4$ が成り立つことを証明せよ．

(2)　正の実数 a，b，c に対して，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\geqq\dfrac{9}{a+b+c}$ が成り立つことを証明せよ．

(1)　$(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)=1+\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+1=\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+2$

$a>0$，$b>0$ より，相加平均と相乗平均の関係から

$\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+2\geqq 2\sqrt{\dfrac{a}{b}\times\dfrac{b}{a}}+2=4$　等号成立は　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{a}$　つまり　$a=b$ のとき．

したがって，$(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\geqq 4$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)　$a>0$，$b>0$，$c>0$ より

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqq\frac{9}{a+b+c}\iff(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqq 9\quad\cdots\cdots①$$

これを証明する

$$(①の左辺)=1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+1+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+1$$

$$=\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+3$$

$a>0$，$b>0$，$c>0$ より，相加平均と相乗平均の関係から

$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqq 2\sqrt{\frac{b}{a}\times\frac{a}{b}}=2$　　等号成立は　$a=b$ のとき

$\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\geqq 2\sqrt{\frac{c}{b}\times\frac{b}{c}}=2$　　等号成立は　$b=c$ のとき

$\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\geqq 2\sqrt{\frac{a}{c}\times\frac{c}{a}}=2$　　等号成立は　$c=a$ のとき

よって　$\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+3\geqq 2+2+2+3=9$

等号成立は　$a=b=c$ のとき

したがって，①すなわち　$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqq\frac{9}{a+b+c}$　が成立

2　[2]　$x>0$，$y>0$ のとき，不等式 $\left(9x+\frac{1}{y}\right)\left(4y+\frac{1}{x}\right)\geqq k$ が常に成り立つような k の値の最大値を求めよ．

$x>0$，$y>0$ より，相加平均と相乗平均の関係から

$$\left(9x+\frac{1}{y}\right)\left(4y+\frac{1}{x}\right)=36xy+\frac{1}{xy}+13\geqq 2\sqrt{36xy\cdot\frac{1}{xy}}+13=2\cdot 6+13=25$$

等号成立は　$36xy=\frac{1}{xy}$　　つまり　$xy=\frac{1}{6}$

よって　$\left(9x+\frac{1}{y}\right)\left(4y+\frac{1}{x}\right)\geqq 25$

したがって，$x>0$，$y>0$ のとき　$\left(9x+\frac{1}{y}\right)\left(4y+\frac{1}{x}\right)\geqq k$　が常に成り立つのは

$25\geqq k$ のとき．

ゆえに求める k の最大値は　$\boldsymbol{k=25}$　$\left(xy=\frac{1}{6}\text{ のとき}\right)$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 ［1］ $z^2=-2i$ のとき，z を求めよ．ただし，$i^2=-1$ である．

$z=a+bi$（a，b は実数）とおくと，

$z^2=(a+bi)^2=a^2+2abi+b^2i^2=a^2-b^2+2abi$

よって　$z^2=-2i$ より　$a^2-b^2=0$　……①，　$2ab=-2$　……②

②より　$b=-\dfrac{1}{a}$　これを①に代入して　$a^2-\left(-\dfrac{1}{a}\right)^2=0$

$a^4-1=0$　　$(a^2+1)(a^2-1)=0$　　a は実数より　$a=\pm1$

よって　$(a,\ b)=(1,\ -1)$，$(-1,\ 1)$

したがって　$\boldsymbol{z=1-i,\ -1+i}$

3 ［2］ 2次方程式 $x^2-x+1=0$ の2つの解を α，β とするとき，$\alpha^{10}+\beta^{10}$，$\alpha^6-2\alpha^3\beta^3+\beta^6$ の値を求めよ．

α は $x^2-x+1=0$ の解より　$\alpha^2-\alpha+1=0$

$(\alpha+1)(\alpha^2-\alpha+1)=0$　　$\alpha^3+1=0$　　よって　$\alpha^3=-1$

同様に　$\beta^2-\beta+1=0$，$\beta^3=-1$

また，解と係数の関係より　$\alpha+\beta=1$，$\alpha\beta=1$

よって　$\alpha^{10}+\beta^{10}=(\alpha^3)^3\cdot\alpha+(\beta^3)^3\cdot\beta=-\alpha+(-\beta)=-(\alpha+\beta)=\boldsymbol{-1}$

$\alpha^6-2\alpha^3\beta^3+\beta^6=(\alpha^3)^2-2\alpha^3\beta^3+(\beta^3)^2=1-2\cdot1^3+1=\boldsymbol{0}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第11講　式と証明・高次方程式(1)

[1]　$x^3-2x^2+7x-1=(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+c$ が x についての恒等式であるとき，$a=$ **ア** ，$b=$ **イ** ，$c=$ **ウ** である.

[2]　$x>0$，$y>0$ のとき，不等式 $\dfrac{k}{x+y}\leqq\dfrac{1}{x}+\dfrac{49}{y}$ が常に成り立つような k の値の最大値は **エオ** である.

[3]　2乗して $7+24i$ となる複素数は　$\pm($ **カ** $+$ **キ** $i)$ である.

解答例

[1]　$x^3-2x^2+7x-1=(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+c$　……①　において

$x=1$ のとき　$1-2+7-1=c$　よって $c=\mathbf{5}$

このとき①は　$x^3-2x^2+7x-1=(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+5$

変形して　$x^3-2x^2+7x-1=x^3+(a-3)x^2+(b-2a+3)x+a-b+4$

両辺の係数を比較して　$a-3=-2$，$b-2a+3=7$，$a-b+4=-1$

これらをすべて満たす a，b の値は　$a=\mathbf{1}$，$b=\mathbf{6}$

[2]　$x>0$，$y>0$ より $\dfrac{k}{x+y}\leqq\dfrac{1}{x}+\dfrac{49}{y}$ の両辺に $x+y$ を掛けると

$$k\leqq\left(\frac{1}{x}+\frac{49}{y}\right)(x+y)=1+\frac{y}{x}+\frac{49x}{y}+49=\frac{y}{x}+\frac{49x}{y}+50$$

$\dfrac{y}{x}>0$，$\dfrac{49x}{y}>0$ より相加平均と相乗平均の関係から

$$\frac{y}{x}+\frac{49x}{y}+50\geqq2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{49x}{y}}+50=2\cdot7+50=64$$

$\left(等号成立は \dfrac{y}{x}=\dfrac{49x}{y}\quad x=\dfrac{1}{7}y のとき\right)$

よって条件を満たす k の最大値は　$k=\mathbf{64}$

[3]　求める複素数を $z=a+bi$（a，b は実数）とおく.

$(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi$　より

$z^2=7+24i$ から　$a^2-b^2=7$　……①　　$2ab=24$　……②

②より　$b=\dfrac{12}{a}$　これを①に代入して

$$a^2-\left(\frac{12}{a}\right)^2=7\qquad a^4-7a^2-144=0\qquad (a^2+9)(a^2-16)=0$$

a は実数より　$a^2=16$　　$a=\pm4$　このとき $b=\pm3$（複号同順）

したがって求める複素数は　$\pm(\mathbf{4}+\mathbf{3}i)$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。